5. STRUCTURI CU MAGNEŢI PERMANENŢI

5.1. Energia câmpului magnetic creat de magneţii permanenţi

Fie un domenuiu Ω, cu peretele $\partial\Omega$ perfect conductor. Peretele poate fi şi la infinit. În interiorul domeniului, o regiune

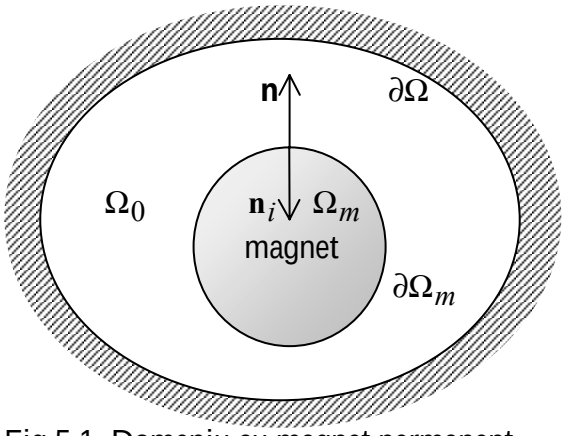

Fig.5.1. Domeniu cu magnet permanent.

Ω_m este ocupată de un material magnetic dur (magnet permanent). În restul domeniului $\Omega_0 = \Omega - \Omega_m$, mediul este liniar. Pentru a pune mai uşor în evidenţă proprietăţile câmpului magnetic creat de magnetul permanent, considerăm că în Ω nu avem curent electric (**J**=0).

Energia câmpului magnetic din domeniul Ω_0, exterior magnetului permanent este (Cap.4.3):

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}dv \qquad (5.1)$$

Deoarece $\mathbf{J}=0$, avem $\oint_{\Gamma}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}=0$ pentru orice curbă închisă Γ din Ω. Rezultă că este valabilă teorema potenţialului magnetic scalar şi putem scrie:

$$\mathbf{H}=-gradV_m \tag{5.2}$$

Înlocuind (5.2) în (5.1) şi folosind formula lui Gauss, avem:

$$W_m=-\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}\mathbf{B}\cdot gradV_m dv=-\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega_0}\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}V_m dS+\frac{1}{2}\int_{\Omega_0}V_m div\mathbf{B}dv \tag{5.3}$$

Datorită legii fluxului magnetic ($div\mathbf{B}=0$), ultimul termen din membrul drept este nul. Bordura $\partial\Omega_0$ a domeniului Ω_0 este $\partial\Omega_0=\partial\Omega\cup\partial\Omega_{mi}$, unde $\partial\Omega_{mi}$ este bordura domeniului Ω_m, cu magnet, orientată spre interiorul lui Ω_m. Ţinând cont că pe peretele perfect conductor avem $B_n=0$, relaţia (5.3) devine:

$$W_m=-\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega}\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}V_m dS-\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega_{mi}}\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{B}V_m dS=\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega_m}\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}V_m dS \tag{5.4}$$

unde $\partial\Omega_m$ este bordura domeniului Ω_m orientată spre exteriorul lui Ω_m. Folosind din nou formula lui Gauss, rezultă:

$$W_m=\frac{1}{2}\int_{\Omega_m}\mathbf{B}\cdot gradV_m dv+\frac{1}{2}\int_{\Omega_m}V_m div\mathbf{B}dv \tag{5.5}$$

şi, ţinând cont de relaţia (5.2) şi de legea fluxului magnetic, obţinem energia câmpului magnetic produs de magnetul permanent în exteriorul lui, exprimată în funcţie de mărimile câmpului magnetic din magnet:

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{\Omega_m} \mathbf{B}\cdot(-\mathbf{H})dv \qquad (5.6)$$

Pentru a comenta relaţia (5.6), să presupunem că, în fiecare punct al magnetului, relaţia **B-H** poate fi descompusă pe direcţia de magnetizare, unde componentele B_m şi H_m urmează curba de histerezis (Fig.5.2), şi în planul ortogonal acestei direcţii, unde componentele $\mathbf{B}_t$ şi $\mathbf{H}_t$ au o relaţie liniară:

$$\mathbf{B}_t = \mu_t \mathbf{H}_t$$

Atunci, relaţia (5.6) se mai poate scrie:

$$W_m = \frac{1}{2}\int_{\Omega_m} B_m\cdot(-H_m)dv - \frac{1}{2}\int_{\Omega_m} \mu_t H_t^2 dv$$

de unde rezultă:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_m} B_m\cdot(-H_m)dv = \frac{1}{2}\int_{\Omega_m} \mu_t H_t^2 dv + W_m \qquad (5.7)$$

Din relaţia (5.7), rezultă că magnetul poate crea câmp magnetic în exteriorul său doar dacă o parte din el are componentele B_m şi H_m ale câmpului magnetic în cadranele 2 sau 4 ale ciclului de histerezis, unde produsul $B_m\cdot(-H_m)$ este pozitiv. Energia câmpului magnetic din domeniul Ω_0 este cu atât mai mare, cu cât produsul $B_m\cdot(-H_m)$ este mai mare, în toate punctele magnetului şi cu cât componenta H_t, din planul ortogonal direcţiei de magnetizare, este mai mică. La o calitate dată a magnetului, aceste condiţii depind de modul în care este proiectată instalaţia cu magneţi permanenţi. Realizarea

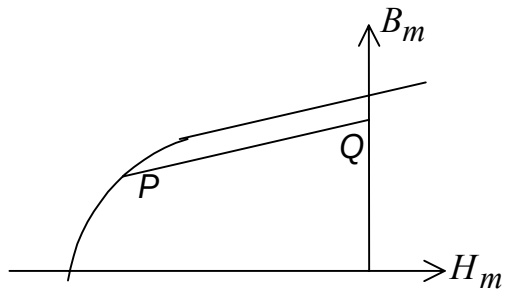

Fig.5.2. Caracteristic` de demagnetizare a magnetului.

unor magneţi cu produs $B_m \cdot (-H_m)$ cât mai mare este meritul firmelor producătoare de magneţi. Aceste firme atribuie valorii maxime a produsului $B_m \cdot (-H_m)$, de pe curba de histerezis limită (v. Partea I, Cap.2, par.2.4), denumirea de "energie maximă a magnetului". Evident, semnificaţia acestui produs nu poate fi energia câmpului magnetic în magnet, unde, din cauza faptului că magnetul este un mediu cu histerezis, nu poate fi definită energia câmpului magnetic.

5.2. Calculul câmpului magnetic creat de magneţii permanenţi

i) Circuite magnetice cu magneţi permanenţi

De cele mai multe ori, magneţii permanenţi pot fi luaţi în considerare în modelul de circuit magnetic adoptat pentru calculul câmpului magnetic. Este necesar ca fluxul fascicular să parcurgă magnetul pe direcţia principală de magnetizare. Magnetul este modelat printr-o latură de circuit magnetic, neliniară şi activă, a cărei caracteristică $\varphi - u_m$ se obţine din caracteristica B_m-H_m, modificând scalele conform relaţiilor

$$\varphi = S_m B_m$$

şi

$$u_m = l_m H_m$$

ii) Sarcini magnetice fictive

Presupunem că relaţia B_m-H_m de pe direcţia de magnetizare este liniară:

$$B_m = \mu_m H_m + B_r \tag{5.8}$$

Această ipoteză este susţinută de faptul că, dacă punctul de funcţionare al magnetului coboară sub cotul din cadranul 2, atunci,

la creşterea inducţiei magnetice, relaţia B_m-H_m nu mai urmăreşte vechea curbă, ci o dreaptă aflată sub vechea curbă (*PQ*, în Fig.5.2). Apoi, atâta timp cât valoarea lui B_m nu scade sub valoarea din punctul *P*, caracteristica B_m-H_m rămâne pe dreapta *PQ*. În tehnică, se aduce intenţionat punctul de funcţionare al magnetului (B_m) la valoarea cea mai mică, pentru ca apoi să fie bine definită caracteristica B_m-H_m pe care o are magnetul (se numeşte "stabilizarea magnetului").

Ţinând cont de (5.8), magnetul permanent apare ca un mediu liniar, anizotrop, cu polarizaţie magnetică permanentă (v. Partea I, Cap.2):

$$\mathbf{B} = \overline{\overline{\mu}}\mathbf{H} + \mathbf{B}_r \tag{5.9}$$

unde tensorul permeabilităţii magnetice are componentele μ_m, pe direcţia de magnetizare, şi μ_t în planul ortogonal acestei direcţii, iar $\mathbf{B}_r = \mathbf{u}_m B_r$, $\mathbf{u}_m$ fiind versorul direcţiei de magnetizare. Presupunem că, în domeniul studiat Ω, avem $\oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$ pentru orice curbă închisă Γ şi atunci este valabilă relaţia (5.2). Înlocuim această relaţie în (5.9) şi apoi aplicăm operatorul *div* şi, ţinând cont de legea fluxului magnetic, obţinem:

$$0 = -div\overline{\overline{\mu}}gradV_m + div\mathbf{B}_r \tag{5.10}$$

Numim sarcină magnetică fictivă mărimea:

$$\rho_m = -div\mathbf{B}_r \tag{5.11}$$

şi relaţia (5.10) se scrie:

$$-div\overline{\overline{\mu}}gradV_m = \rho_m \tag{5.12}$$

Ecuaţia (5.12) este aceeaşi cu ecuaţia potenţialului folosită în electrostatică (ecuaţia (1.5) de la Partea a II-a, Cap.1). Putem folosi

metodele de determinare a câmpului electric din electrostatică. De exemplu, dacă $\mu_m = \mu_t = \mu_0$, proprietate valabilă pentru magneţi din ferite sau din pământuri rare, şi dacă domeniul de calcul este nemărginit şi are peste tot permeabilitatea magnetică μ_0, atunci putem folosi formulele coulombiene (Partea a II-a, Cap.4, par.4.1):

$$V_m = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_D \frac{\rho_m}{r} dv \tag{5.13}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \int_D \frac{\rho_m \mathbf{r}}{r^3} dv \tag{5.14}$$

unde D este domeniul ocupat de magnet. De cele mai multe ori, admitem că magneţii sunt magnetizaţi uniform şi, ca urmare, $\mathbf{B}_r$=ct în interiorul magnetului. Atunci, în relaţia (5.11), apare divergenţa superficială (v. Partea I, Cap.4, par.4.1):

$$\rho_{mS} = -div_S \mathbf{B}_r = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_r \tag{5.15}$$

unde **n** este normala la frontiera ∂D a domeniului D. În locul integralei (5.14), avem:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \oint_{\partial D} \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_r)\mathbf{r}}{r^3} dS \tag{5.16}$$

Observaţie. În Vol.II al acestei lucrări, se va arăta că se pot folosi sarcinile magnetice fictive (5.11) şi pentru calculul forţelor care acţionează asupra magneţilor pemanenţi, datorate polarizaţiei magnetice permanente a magneţilor (5.9). La fel ca în electrostatică, avem:

$$\mathbf{F} = \int_D \rho_m \mathbf{H} dv$$

Echivalarea polarizaţiei magnetice cu sarcini magnetice fictive este valabilă atât din punctul de vedere al câmpului magnetic produs de magneţi, cât şi din punctul de vedere al forelor ce se exercită asupra magneţilor.

iii) Curenţi amperieni

Din legea fluxului magnetic, rezultă că putem scrie $\mathbf{B} = rot\mathbf{A}$ pe care-l înlocuim în relaţia (5.9), înmulţim apoi cu $\overline{\overline{\mu}}^{-1}$ şi aplicăm operatorul *rot*. Rezultă:

$$rot\,\overline{\overline{\mu}}^{-1}\,rot\mathbf{A} = rot\,\overline{\overline{\mu}}^{-1}\mathbf{B}_r \tag{5.17}$$

Numim densitatea de volum a curenţilor amperieni mărimea:

$$\mathbf{J}_m = rot\,\overline{\overline{\mu}}^{-1}\mathbf{B}_r \tag{5.18}$$

şi relaţia (5.17) se scrie:

$$rot\,\overline{\overline{\mu}}^{-1}\,rot\mathbf{A} = \mathbf{J}_m \tag{5.19}$$

Ecuaţia (5.19) este aceeaşi cu ecuaţia potenţialului magnetic vector folosită la rezolvarea problemelor de câmp magnetic staţionar (4.18). Putem folosi metodele de determinare a câmpului magnetic (Cap.4). De exemplu, dacă $\mu_m = \mu_t = \mu_0$ şi dacă domeniul de calcul este nemărginit şi are peste tot permeabilitatea magnetică μ_0, atunci putem folosi formulele Biot-Savart-Laplace (par.4.2)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_D \frac{\mathbf{J}_m \times \mathbf{r}}{r^3} dv \tag{5.20}$$

Dacă admitem că magneţii sunt magnetizaţi uniform, atunci, în relaţia (5.11), apare rotorul superficial (v. Partea I, Cap.4, par.4.4):

$$\mathbf{J}_{mS} = \frac{1}{\mu_0} rot_S \mathbf{B}_r = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{n} \times \mathbf{B}_r \tag{5.21}$$

În locul integralei (5.20), avem:

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{4\pi} \oint_{\partial D} \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{B}_r) \times \mathbf{r}}{r^3} dS \tag{5.22}$$

Observaţie. În Vol.II al acestei lucrări, se va arăta că se pot folosi curenţii amperieni (5.18) şi pentru calculul forţelor care acţionează asupra magneţilor pemanenţi, datorate polarizaţiei magnetice permanente a magneţilor (5.9). Avem:

$$\mathbf{F} = \int_D \mathbf{J}_m \times \mathbf{B} dv$$

Echivalarea polarizaţiei magnetice cu curenţi amperieni este valabilă atât din punctul de vedere al câmpului magnetic produs de magneţi, cât şi din punctul de vedere al forelor ce se exercită asupra magneţilor.